Απειροστικός Λογισμός III

18/10/2016
5ο Μάθημα

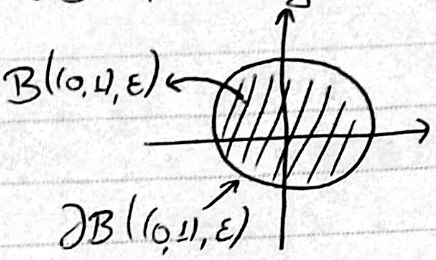
$f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$g : [\varepsilon, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ $(\varepsilon = (0,1))$

ανοιχτή μπάλα : $B(\bar{x}, \varepsilon) = \{ \bar{y} \in \mathbb{R}^n : \| \bar{y} - \bar{x} \| < \varepsilon \}$

κλειστή μπάλα : $\bar{B}(\bar{x}, \varepsilon) = \{ \bar{y} \in \mathbb{R}^n : \| \bar{y} - \bar{x} \| \leq \varepsilon \}$

σφαίρα : $\partial B(\bar{x}, \varepsilon) = \{ \bar{y} \in \mathbb{R}^n : \| \bar{y} - \bar{x} \| = \varepsilon \}$ $\boxed{n=2}$



$U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό $\Leftrightarrow$ $\forall \bar{x} \in U$ $\exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \in U$

$U \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus U$ ανοικτό

Παράδειγμα

α) $B(\bar{x}, \varepsilon)$ ανοιχτό : ✓

β) $\bar{B}(\bar{x}, \varepsilon)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$: κλειστό

απόδειξη

β) Θ.δ.ο $\mathbb{R}^n \setminus \underbrace{\bar{B}(\bar{x}, \varepsilon)}_{= \{ \bar{y} \in \mathbb{R}^n : \| \bar{y} - \bar{x} \| \leq \varepsilon \}}$ ανοικτό

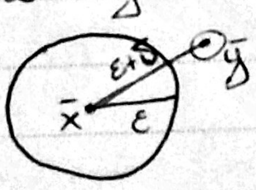
$$\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(\bar{x}, \varepsilon) = \{ \bar{y} \in \mathbb{R}^n : \| \bar{y} - \bar{x} \| > \varepsilon \} =: C$$

Συνεπώς θδο C ανοιχτό

—||— $\forall \bar{y} \in C$ $\exists \delta > 0 : B(\bar{y}, \delta) \subset C$

Έστω $\bar{y} \in C \Rightarrow \| \bar{y} - \bar{x} \| > \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ $\| \bar{y} - \bar{x} \| = \varepsilon + \delta$



Ισχυρισμός: Για αυτό το $\delta > 0$ ισχύει $B(\bar{y}, \delta) \subset C$

Συνεπώς $\underbrace{\forall \bar{z} \in B(\bar{y}, \delta)}_{\Leftrightarrow \| \bar{y} - \bar{z} \| < \delta}$: $\underbrace{\bar{z} \in C}_{\Leftrightarrow \| \bar{z} - \bar{x} \| > \varepsilon}$

Δηλ. ΘΔΟ $\left.\begin{array}{l} \|\bar{y}-\bar{x}\| = \varepsilon+\delta \\ \underbrace{\|\bar{y}-\bar{z}\| < \delta} \end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} \|\bar{z}-\bar{x}\| > \varepsilon$

$\Rightarrow \|\bar{y}-\bar{x}\| - \|\bar{y}-\bar{z}\| > \varepsilon + \delta - \delta = \varepsilon$

Όμως ισχύει:

$\|\bar{z}-\bar{x}\| \geq \|\bar{y}-\bar{x}\| - \|\bar{y}-\bar{z}\|$

$\Leftrightarrow \|\bar{y}-\bar{x}\| \leq \|\bar{z}-\bar{x}\| + \|\bar{y}-\bar{z}\|$

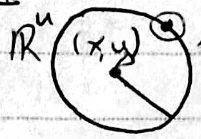
αφού $\bar{y}-\bar{x} = \bar{y}-\bar{z} + \bar{z}-\bar{x}$

και άρα $\|\bar{y}-\bar{x}\| = \|(\bar{y}-\bar{z}) + (\bar{z}-\bar{x})\|$

$\leq \|\bar{y}-\bar{z}\| + \|\bar{z}-\bar{x}\|$

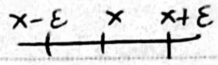
Τριγωνική ανισότητα

$\boxed{n=2}$



ανοιχτή μπάλα στον:

$n=1 \rightarrow$ διάστημα



$n=2 \rightarrow$ κυκλικός δίσκος 

$n=3 \rightarrow$ σφαίρα 

→ Η πιο θεμελιώδης ιδιότητα των ανοιχτών υποσυνόλων (ενός αρχικού συνόλου) είναι η εξής:

Θεώρημα: Η ένωση μιας οικογένειας ανοιχτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτή (οσοδήποτε «μεγάλη» δηλ. π.χ. υπεραριθμήσιμη και να είναι η οικογένεια) και η πεπερασμένη τομή (δηλ. η τομή ενός πεπερασμένου συνόλου) ανοιχτών είναι ανοιχτή.

απόδειξη

Έστω ότι έχω U_i, $i \in I$: ανοιχτό

ΘΔΟ $\bigcup_{i\in I} U_i$ είναι ανοιχτό

Έστω $\bar{x} \in \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists\, i_0 \in I : \bar{x} \in U_{i_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U_{i_0} \subset \bigcup U_i$, $i \in I$.

Παραδείγματα

Έστω τώρα ότι U_i, $i=1,\dots,k$, $k\in\mathbb{N}$, ανοιχτά

Θ.δ.ο. $\bigcap_{i=1}^{k} U_i$ ανοιχτό.

Λύση

Έστω $\bar{x}\in\bigcap_{i=1}^{k} U_i\ (\neq\emptyset) \Rightarrow \forall i=1,\dots,k : \bar{x}\in U_i$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon_i>0 : B(\bar{x},\varepsilon_i)\subset U_i \quad \forall i=1,\dots,k$

$\Rightarrow$ Για $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i ,\ i=1,\dots,k\}>0$

Έχουμε $B(\bar{x},\varepsilon)\subset B(\bar{x},\varepsilon_i)\subset U_i \quad \forall i=1,\dots,k$

$\Rightarrow B(\bar{x},\varepsilon)\subset \bigcap_{i=1}^{k} U_i$

Παρατήρηση:

Το $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ είναι (τα μοναδικά υποσύνολα που είναι) και ανοιχτά και κλειστά.

Ορισμός: (που έχει διαισθητική δικαιολόγηση)

Το $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό, αφού $\forall \bar{x}\in\mathbb{R}^n \ \exists \varepsilon>0$

$B(\bar{x},\varepsilon) := \{\bar{y}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{y}-\bar{x}\| <$

$\Rightarrow \mathbb{R}^n\setminus\mathbb{R}^n=\emptyset$ είναι κλειστό $\subset\mathbb{R}^n$

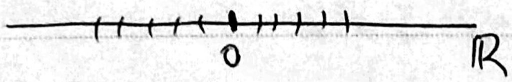
Από την άλλη, αφού $U\in\mathbb{R}^n :\Leftrightarrow \forall \bar{x}\in U : \dots$

και $\nexists\, \bar{x}\in\emptyset$ το ... είναι αληθές (!) $\Rightarrow$

$\emptyset$ είναι ανοιχτό $\Rightarrow \mathbb{R}^n\setminus\emptyset=\mathbb{R}^n$ κλειστό

Παρατήρηση: Αν πάρουμε μια αριθμήσιμη τομή ανοικτών, τότε αυτή δεν θα είναι απαραίτητα ανοιχτή.

π.χ. για $n=1$



Θέλω ένα παράδειγμα μιας ακολουθίας $\emptyset$ ανοικτών διαστημάτων η τομή των οποίων $\neq\emptyset$ αλλά ούτε ανοικτή.

π.χ.

η ακολουθία $\left(-\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu}\right)$, $\nu\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}}\left(-\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu}\right)=\{0\}$ το οποίο δεν είναι ανοικτό ~~κλειστό~~

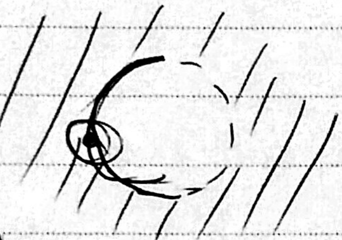
(Αφού $\nexists\ (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \{0\}$ με $\varepsilon > 0$)

Παρατήρηση: $\forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$: $\{\bar{x}\}$ είναι κλειστό

$\overset{\text{ορισμός}}{\iff}$ $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$ είναι ανοικτό

Επεξήγηση ανοικτού και κλειστού

~~ανοικτό~~ A όχι ανοικτό



~~κλειστό~~ $\mathbb{R}^n \setminus A$ όχι ανοικτό

$\iff$ A όχι κλειστό.

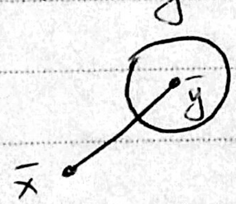
Ένα σύνολο $\neq \varnothing$ $\mathbb{R}^n$ μπορεί να είναι ή ανοικτό ή κλειστό ή τίποτα από τα δύο

Το $\varnothing$, $\mathbb{R}^n$ είναι και ~~αυτό~~ ανοικτό και κλειστό.

$\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$ ανοικτό

$\iff \forall\, \bar{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\} : \exists\, \varepsilon > 0 : B(\bar{y}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$

$\iff \forall\, \bar{y} \neq \bar{x} \quad \exists\, \varepsilon > 0 : \forall\, \bar{z}$ με $\|\bar{z} - \bar{y}\| < \varepsilon$, $\bar{z} \neq \bar{x}$



πχ. (λύπως?)

$\varepsilon = \|\bar{y} - \bar{x}\| > 0$

Έστω $\|\bar{z} - \bar{y}\| < \|\bar{y} - \bar{x}\| \Rightarrow \bar{z} \neq \bar{x}$

(Άσκηση)

Αντίστοιχα: Θεώρημα: Η τομή μιας οικογένειας κλειστών είναι κλειστή και η πεπερασμένη ένωση κλειστών είναι κλειστή.

αποδειξη

Εστω $K_i, \dots, i \in I$: κλειστό

Θδο : $\bigcap_{i\in I} K_i$ κλειστή $\iff \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcap_{i\in I} K_i\right)}$ είναι ανοικτό

$$= \bigcup_{i\in I} \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus K_i)}_{\text{ανοικτά}}$$

Ασκηση:

Εστω K_i $i=1,\dots,m$, $m \in \mathbb{N}$ κλειστό

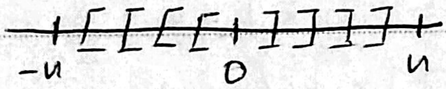
Θδο $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ κλειστό $\iff \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m} K_i\right)}$ ανοικτό

$$= \bigcap_{i=1}^{m} \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus K_i)}_{\text{ανοικτό}}$$

Παράδειγμα

Μιας αριθμητικής ενωσης κλειστών η οποία δεν είναι κλειστή.

πχ για $n=1$



$x<1 \Rightarrow \exists \nu \in \mathbb{N}, \ x \le 1 - \frac{1}{\nu}$

πχ $\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[-1+\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}\right] = (-1, 1)$

σειρό) { Πεπερασμένο σύνολο πχ $\{1, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$

θμήσιμο { Αριθμήσιμο (π.ο. σωστα : απειρα αριθμήσιμο)

μια ακολουθια $(\bar{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{\bar{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$

Υπεραριθμήσιμο ένα σύνολο που δεν είναι ούτε πεπερασμένο ούτε απειρα αριθμήσιμο πχ. το $\mathbb{R}$

Συνήθως εδω (ο Γ.Γ.) όταν λεμε αριθμήσιμο θα εννοούμε απειρα αριθμήσιμο (η το $\mathbb{R}^n$).

Πεπερασμένο σύνολο είναι ένα συνολο που εχει πεπερασμένο αριθμό ~~στοιχείων~~ στοιχείων (κάθε σύνολο περιέχει διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία)

<u>Αυστηρά αριθμήσιμο</u> είναι ένα σύνολο που περιέχει άπειρα αριθμ. αριθμό στοιχείων (δηλ. μπορούν να γραφούν και σύνολο ως ακολουθία) (δηλ. $\exists!$ 1-1 και επί $f: \mathbb{N} \to$ σύνολο)

<u>Υπεράριθμο</u> είναι ένα σύνολο που δεν είναι αριθμήσιμο.

$(0,1)$ υπεραριθμήσιμο αλλά φράγμενο
$\exists c>0 \ \forall x \in (0,1): |x| < c$

<u>Εφαρμογή:</u> (του τελευταίου θεωρήματος)

$\partial B(\bar{x}, r)$: κλειστό

$$= \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y}-\bar{x}\| = r\}$$
$$= \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y}-\bar{x}\| = r\}$$
$$\cap \underbrace{\{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y}-\bar{x}\| \geq r\}}$$
$$= \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y}-\bar{x}\| < r\}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{κλειστό}}{\partial B(\bar{x}, r)} = \underbrace{\bar{B}(\bar{x}, r)}_{\text{κλειστό}} \cap \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus \underbrace{B(\bar{x}, r)}_{\text{ανοιχτό}})}_{\text{κλειστό}}$$

<u>Ορισμός:</u>

Ένα $U \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται:

α) <u>φραγμένο</u>, αν $\exists c>0 : U \subset B(\bar{0}, c)$

δηλ. αν $\exists c>0 \ \forall \bar{x} \in U : \|\bar{x}\| < c$

<u>πχ.</u> η κλειστή μπάλα, η ανοιχτή μπάλα, η σφαίρα είναι φραγμένα σύνολα.

ενώ <u>πχ</u> η ευθεία $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ δεν είναι φραγμένο σύνολο.

[<u>απόδειξη</u> $\forall c>0$ το στοιχείο $(2c, 0) \in \mathbb{R}^2$ δεν περιέχεται στην ανοιχτή μπάλα $B((0,0), c)$

$\Leftrightarrow \|(2c,0) - (0,0)\| = 2c$

και $c = 2c$

~~Συμπαγές~~

β) <u>συμπαγές</u>, αν είναι κλειστό και φραγμένο

<u>πχ.</u> η κλειστή μπάλα είναι συμπαγής

η ανοιχτή είναι φραγμένη, αλλά όχι συμπαγής

ο $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστός, αλλά όχι φραγμένος

μια ευθεία στον $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστή, αλλά όχι φραγμένη

[Αυτός δεν είναι ο «επίσημος» γενικότερος ορισμός (γιατί?) της συμπάγειας, αλλά στην περίπτωση του $\mathbb{R}^n$ (και άλλες περιπτώσεις) με την ευκλείδεια μετρική συμπίπτει με αυτόν]

<u>Ορισμός:</u>

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Ένα (οποιοδήποτε) $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται

α) <u>εσωτερικό σημείο του U</u>
αν $\exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$.

β) <u>εξωτερικό σημείο του U</u>
αν είναι εσωτερικό του συμπληρώματος $(\mathbb{R}^n \setminus U)$

γ) <u>συνοριακό σημείο</u>, αν δεν είναι ούτε εσωτερικό ούτε εξωτερικό.

→ Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του U ονομάζεται εσωτερικό (σύνολο) του U (συμβ. $\mathring{U}$ ή $\mathrm{int}\, U$) το σύνολο των εξωτερικών ~~σημ~~ σημείων εξωτερικό (σύνολο) και το σύνολο των συνοριακών σημείων σύνορο U (συμβ. ∂U ή $\mathrm{bd}\, U$) και ισχύει για κάθε $U \in \mathbb{R}^n$

$\mathrm{int}\, U \cup \mathrm{ext}\, U \cup \mathrm{bd}\, U = \mathbb{R}^n$

i~~[illegible]~~ και η τομή αυτή αποτελείται από ξένα μεταξύ τους σύνολα.

Άσκηση (για σπίτι)

Βρείτε τα εσωτερικα, εξωτερικα, συνοριακά σημεια της ανοικτης μπάλας, κλειστης μπαλας, σφαιρας.